Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Zahlentheorie I (Algebraische Zahlentheorie), WiSe 22/23
Blatt 4

Aufgabe 1 (5 Punkte):

(i) Berechnen Sie das Legendre-Symbol $\left(\frac{92}{167}\right)$.

(ii) Berechnen Sie das Jacobi-Symbol $\left(\frac{140}{-1287}\right)$.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Weisen Sie Eigenschaften 7.7 (1), (2) und (3) des Jacobi-Symboles nach.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Wir definieren eine Abbildung

$$(-,-)\colon \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times \to \{\pm 1\},\ (a,b) = \begin{cases} 1, & \text{falls } z^2 = ax^2 + by^2 \text{ eine Lösung in } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \text{ hat} \\ -1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Seien $a, a', b, b' \in \mathbb{R}^\times$. Rechnen Sie folgende Eigenschaften nach:

(1) $(a,b) = (b,a)$

(2) $(a,b) = 1$, falls a oder b ein Quadrat ist.

(3) $(a \cdot a', b) = (a,b) \cdot (a',b)$

(4) $(a, b \cdot b') = (a,b) \cdot (a,b')$

(5) $(a, 1-a) = 1$, falls $a \neq 1$ ist.

(ii) Folgern Sie, dass die Abbildung $(-,-)$ durch die abelsche Gruppe

$$K_2^M(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}^\times)/\langle a \otimes 1 - a \mid a \in \mathbb{R}^\times \setminus \{1\}\rangle$$

faktorisiert (d.h. eine Abbildung $\{-,-\}\colon K_2^M(\mathbb{R}) \to \{\pm 1\}$ existiert mit

$$\{-,-\} \circ (q \circ (- \otimes -)) = (-,-),$$

wobei $- \otimes -\colon \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}^\times$ die Tensorabbildung und $q\colon \mathbb{R}^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}^\times \to K_2^M(\mathbb{R})$ die Quotientenabbildung ist).

bitte wenden

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Zahlentheorie I (Algebraische Zahlentheorie), WiSe 22/23
Blatt 4

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Sei $\mathbb{Q} \subseteq K$ ein Zahlkörper von Grad n. Sei zudem $x_1, \dots, x_n$ eine Ganzheitsbasis von K und seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Einbettungen $K \hookrightarrow \mathbb{C}$, welche $\mathbb{Q}$ fix lassen. Wir wollen in dieser Aufgabe zeigen, dass die Diskriminante $\mathrm{disc}(x_1, \dots, x_n) = \det((\alpha_i(x_j))_{i,j})^2$ eine ganze Zahl ist, welche nur die beiden Werte 0 und 1 mod 4 annehmen kann.

(i) Rechnen Sie zunächst nach, dass $\mathrm{disc}(x_1, \dots, x_n) = (G + U)^2 - 4GU$ ist, wobei

$$G = \sum_{\sigma \in A_n} \prod_{i=1}^{n} \alpha_{\sigma(i)}(x_j) \text{ und } U = \sum_{\sigma \in S_n \setminus A_n} \prod_{i=1}^{n} \alpha_{\sigma(i)}(x_j).$$

(ii) Sei nun K^{norm} der normale Abschluss von K. Dann ist also $\mathbb{Q} \subseteq K^{\mathrm{norm}}$ eine Galois-Erweiterung. Rechnen Sie nach, dass für jedes $\varphi \in \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{norm}}/\mathbb{Q})$, entweder $\varphi(G) = G$ und $\varphi(U) = U$ oder $\varphi(G) = U$ und $\varphi(U) = G$ ist.

(iii) Folgern Sie, dass $G + U$ und GU ganze Zahlen sind.

(iv) Beenden Sie den Beweis.